Egzamin z **analizy matematycznej I.2**

Część teoretyczna 29 czerwca 2022, 9:00 – 9:45

Imię, nazwisko, nr indeksu ____________________

1. (4p) Sformułować i **wykazać** twierdzenie Fermata (o warunku koniecznym istnienia ekstremum lokalnego).

2. (2p) Podać definicję funkcji wypukłej.

3. (2p) Sformułować twierdzenie o wzorze Taylora z resztą w postaci Lagrange'a.

4. (2p) Podać definicję zbieżności jednostajnej.

5. (4p) Niech $A, B \subset \mathbb{R}$. Wykazać, że jeśli ciąg funkcyjny $(f_n)_n : A \cup B \to \mathbb{R}$ jest jednostajnie zbieżny na A i jednostajnie zbieżny na B, to jest jednostajnie zbieżny na $A \cup B$.

Imię, nazwisko, nr indeksu ____________________

6. (4p) Udowodnić, następujące stwierdzenie.
Jeśli funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *jest ciągła i nieujemna oraz*

$$\int_a^b f(t)dt = 0, \ \textit{to} \ \forall_{x \in [a,b]} \ f(x) = 0.$$

7. (4p) Podać przykład ciągu $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ funkcji całkowalnych w sensie Riemanna, punktowo zbieżnego do $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, całkowalnej w sensie Riemanna, takiego, że

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx \neq \int_a^b f(x)dx.$$

Uzasadnić, że podany ciąg ma żądaną własność.

8. (3p) Podać definicję funkcji Γ-Eulera i charakteryzujące ją własności (Tw. Bohra).